Sur les fonctions a singularité de dimension 1.

Daniel Barlet[*]

version revisée le 03/09/07
(seconde version de la prépublication 2007/01)

Abstract

In this article we show that all results proved for a large class of holomorphic germs $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ with a 1-dimension singularity in [B.II] are valid for an arbitrary such germ.

AMS Classification (2000) : 32-S-25, 32-S-40, 32-S-50.

Contents

[*]Barlet Daniel, Institut Elie Cartan UMR 7502
Nancy-Université, CNRS, INRIA et Institut Universitaire de France,
BP 239 - F - 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex.France.
e-mail : barlet@iecn.u-nancy.fr

1 Introduction.

1.1 Généralisation de l'étude locale aux points génériques de la courbe S.

Dans le présent article nous considèrerons la situation suivante :
Soit $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe dont le lieu singulier $S := \{x \ / \ f(x) = 0 \text{ et } df_x = 0\}$ est un germe de courbe à l'origine, et soit $t : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe non singulière tel que la restriction de t à $(S, 0)$ soit finie. Sur un voisinage ouvert X de l'origine assez petit on aura pour chaque $\sigma \in S^* := S \setminus \{0\}$ un (a,b)-module associé au germe en σ de fonction à singularité isolée obtenu en restreignant f à l'hypersurface lisse définie par $\{t = t(\sigma)\}$. Rappelons que ce (a,b)-module n'est rien d'autre que le complété formel du module de Brieskorn de ce germe de fonction à singularité isolée (voir par exemple [B.05]).
Les faisceaux de cohomologie $\hat{\mathcal{H}}^\bullet$ du complexe de de Rham

$$(\hat{K}er\, df^\bullet, d^\bullet)$$

où $\hat{K}er\, df^\bullet$ désigne le noyau de la multiplication extérieure par df

$$\wedge df^\bullet : \hat{\Omega}^\bullet \to \hat{\Omega}^{\bullet+1}$$

agissant sur le complété formel en f des formes holomorphes, sont nuls en degrés différents de $1, n, n+1$ dans cette situation et les faisceaux $\hat{\mathcal{H}}^n$ et $\hat{\mathcal{H}}^{n+1}$ sont à support dans S. La considération du germe auxilliaire t permet de calculer ces deux faisceaux comme respectivement noyau et conoyau d'une $t-$connexion compatible avec les opérations a et b de la façon suivante.
Soit $(\hat{K}er\, df_/^\bullet, d_/^\bullet)$ le complexe de de Rham $t-$relatif complété formellement en f, et soit $\mathbb{E} := \mathcal{H}^n(\hat{K}er\, df_{//}^\bullet, d_/^\bullet)$. Ce faisceau est naturellement muni d'opérations a et b ainsi que d'une structure de $t^{-1}(\mathcal{O}_D)-$module, où D est un disque de centre 0 assez petit dans $\mathbb{C}$. Nous définissons alors une $t^{-1}(\mathcal{O}_D)-$connexion

$$b^{-1}.\nabla : \mathbb{P} \to \mathbb{E}$$

où $\mathbb{P} := \{x \in \mathbb{E} \ / \ \nabla(x) \in b.\mathbb{E}\}$, qui commute à a et b.
La proposition suivante est démontrée dans [B.II] prop. 4.2.8.

Proposition 1.1.1 *On a une suite exacte naturelle de faisceaux de* $\underline{\mathbb{C}}_X-$*modules à support* S *:*

$$0 \to \hat{\mathcal{H}}^n \xrightarrow{u} \mathbb{P} \xrightarrow{b^{-1}.\nabla} \mathbb{E} \xrightarrow{v} \hat{\mathcal{H}}^{n+1} \to 0$$

compatible aux opérations a *et* b *sur ces faisceaux, où* u *est induite par la projection évidente* $\hat{K}er\, df^n \to \hat{\Omega}^n_{/}$ *et* v *par la multiplication extérieure par* dt.

L'objectif principal de cet article est de montrer le résultat "technique" suivant :

Théorème 1.1.2 *Dans la situation précisée ci-dessus, on a*

1. *le faisceau* $\hat{\mathcal{H}}^n$ *est un système local de (a,b)-modules géométriques sur* S^*.
2. *La restriction à* S^* *du faisceau* $\hat{\mathcal{H}}^{n+1}$ *vérifie la propriété de prolongement analytique suivante*

   (PA) Soient $V \subset U$ *deux ouverts de* S^**, avec* U *connexe et* V *non vide. Alors la restriction* $\Gamma(U, \hat{\mathcal{H}}^{n+1}) \to \Gamma(V, \hat{\mathcal{H}}^{n+1})$ *est injective.*

Ce résultat montre que l'assertion " le faisceau $\hat{\mathcal{H}}^n$ est un système local de (a,b)-modules réguliers et géométriques sur S^* " du théorème 4.3.1 ainsi que le théorème 4.3.2 de [B.II] sont valables sans restriction pour un germe de fonction holomorphe à singularité de dimension 1. Ceci implique que l'ensemble des résultats de [B.II] est valable dans ce cadre. En particulier le théorème de finitude 5.2.1, le corollaire 5.2.3 ainsi que les théorèmes 6.2.1 et 6.4.1.
Les énoncés généralisant les théorèmes 5.2.1 et 6.2.1 sont détaillés ci-après pour la commodité du lecteur.

1.2 Quelques conséquences.

1.2.1 Rappels.

Dans ce qui suit f **désignera un germe à l'origine de** $\mathbb{C}^{n+1}$ **de fonction holomorphe qui est supposé réduit.**

Pour f réduite, on a un isomorphisme naturel compatible à a et b,

$$E_1 \otimes \mathbb{C}_Y \simeq \hat{\mathcal{O}}_X.df \cap Ker\, d \simeq \mathcal{H}^1\big((\hat{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet)\big)$$

où l'on a posé $E_1 := \mathbb{C}[[z]].dz$, muni des opérations $a := \times z$ et $b := (\int_0^z).dz$.
Placé en degré 1 ce faisceau défini un sous-complexe, que nous noterons $E_1 \otimes \mathbb{C}_Y[1]$, du complexe $\big((\hat{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet\big)$.
Nous définirons le complexe $\big((\tilde{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet\big)$ comme le quotient

$$\big((\tilde{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet\big) := \big((\hat{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet\big)/E_1 \otimes \mathbb{C}_Y[1].$$

Notons $\widehat{\mathcal{A}}$ la $\mathbb{C}-$algèbre $\widehat{\mathcal{A}} := \{\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(a).b^\nu,$ avec $P_\nu \in \mathbb{C}[x]\}$ dont le produit est défini par les deux conditions suivantes :

- 1) On a la relation de commutation $a.b - b.a = b^2$.
- 2) La multiplication par a (à gauche ou à droite) est continue pour la filtration $b-$adique.

On a alors le résultat général suivant (voir [B.II] th. 2.1.1) :

Théorème 1.2.1 *Les complexes $\big((\tilde{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet\big)$ et $\big((\hat{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet\big)$ sont canoniquement quasi-isomorphes à des complexes de faisceaux de $\widehat{\mathcal{A}}-$modules (à gauche) sur Y ayant des différentielles $\widehat{\mathcal{A}}-$linéaires.*
De plus, via ces quasi-isomorphismes, la suite exacte

$$0 \to E_1 \otimes \mathbb{C}_Y[1] \to \big((\hat{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet\big) \to \big((\tilde{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet\big) \to 0$$

correspond à une suite exacte de complexes de faisceaux de $\widehat{\mathcal{A}}-$modules.

Ce théorème montre l'existence d'une structure naturelle de $\widehat{\mathcal{A}}-$modules sur tout groupe d'hypercohomologie de ces deux complexes. Il donne également la $\widehat{\mathcal{A}}-$linéarité (à gauche) des applications naturelles entre ces groupes.

1.2.2 Les résultats principaux.

Supposons maintenant que le lieu singulier S de f est une courbe.

Rappelons qu'un $\tilde{\mathcal{A}}-$module E est dit régulier géométrique s'il est de type fini sur la sous-algèbre $\mathbb{C}[[b]]$ de $\tilde{\mathcal{A}}$, et si son quotient par sa $b-$torsion (qui toujours est un (a,b)-module, puisque $\mathbb{C}[[b]]-$libre de type fini) est un (a,b)-module régulier géométrique.
Rappelons encore qu'un (a,b)-module E est régulier si son saturé par $b^{-1}.a$, noté $E^\sharp$, est encore de type fini sur $\mathbb{C}[[b]]$. Il sera dit géométrique si, de plus, les valeurs propres de $b^{-1}.a$ agissant sur l'espace vectoriel de dimension finie $E^\sharp/b.E^\sharp$ sont dans $\mathbb{Q}^{+*} - 1$ (donc rationnelles strictement supérieures à -1). Cette condition est vérifiée pour le (a,b)-module de Brieskorn d'un germe à singularité isolée grâce au théorème de Monodromie et au théorème de positivité de Malgrange.

Notons $\hat{\mathcal{H}}^i$ le i-ème faisceau de cohomologie du complexe $\big((\hat{\mathcal{K}}er\, df)^\bullet, d^\bullet\big)$.
Nous noterons $c\cap S$ (resp. c) la famille des fermés de $Y := f^{-1}(0)$ qui rencontrent S suivant un compact (resp. la famille des compacts de Y).
Le théorème 1.2.2 implique la généralisation suivante du théorème 5.2.1 de [B.II].

Théorème 1.2.2 *Les $\tilde{\mathcal{A}}-$modules suivants sont réguliers géométriques :*

1. $H^i_{\{0\}}(Y, \hat{\mathcal{H}}^j)$ *pour* $i \geq 0$ *et* $j = 1, n$.
2. $E := H^0_{\{0\}}(Y, \hat{\mathcal{H}}^{n+1})$.

3. $E_\Phi := \mathbb{H}^{n+1}_\Phi(Y, (\hat{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet))$ *et* $E'_\Phi := \mathbb{H}^{n+1}_\Phi(Y, (\tilde{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet))$ *pour* $\Phi = c$ *et* $\Phi = c \cap S$.

On en déduit également la généralisation suivante du théorème 6.2.1 de [B.II].

Théorème 1.2.3 *On a pour* $n \geq 2$ *un accouplement (a,b)-sesquilinéaire naturel, non dégénéré*

$$h : E'_{c\cap S} \times E \longrightarrow |\Xi'|^2$$

donné par intégration dans les fibres de f *.*

On a posé ici, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé

$$|\Xi'|^2 := \sum_{r\in]-1,0]\cap\mathbb{Q}\ ,\ j\in[0,n]} \mathbb{C}[[s,\bar{s}]].|s|^{2r}.(Log|s|^2)^j \Big/ \mathbb{C}[[s,\bar{s}]]\ .$$

Précisons ce que signifie "donné par intégration sur les fibres de f ".
Soient ω resp. ω' des $(n+1)-$formes $\mathcal{C}^\infty$ annulées par $\wedge df$ et par d, le support de ω' rencontrant S suivant un compact K. Soit alors $\rho \in \mathcal{C}^\infty_c(X)$ vérifiant $\rho \equiv 1$ au voisinage de K . Alors nous définirons

$$h([\omega'],[\omega]) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{f=s} \rho.\frac{\omega'}{df} \wedge \overline{\frac{\omega}{df}} \ \in |\Xi'|^2.$$

Le calcul des $\hat{\mathcal{A}}-$modules $E'_{c\cap S}$ et E via de telles formes $\mathcal{C}^\infty$ est justifié par le lemme 6.1.1 de [B.II].
Précisons enfin ce que nous entendons par accouplement "non dégénéré".

- Pour tout élement $[\omega'] \in E'_{c\cap S}$ qui n'est pas de $b-$torsion, il existe un élément $[\omega] \in E$ telle que $h([\omega'],[\omega]) \neq 0$ dans $|\Xi'|^2$.
- Pour tout élément $[\omega] \in E$ qui n'est pas de $b-$torsion, il existe un élément $[\omega] \in E'_{c\cap S}$ tel que $h([\omega'],[\omega]) \neq 0$ dans $|\Xi'|^2$.

2 La $b^{-1}.\nabla$ finitude.

2.1 La situation considérée

Soit $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe à lieu singulier $(S, 0)$ de dimension 1, et soit $t : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe non singulière. Notons $(\Sigma, 0)$ le lieu critique du germe d'application

$$(f, t) : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0).$$

Faisons l'hypothèse que $(\Sigma, 0)$ soit de dimension 1 et que la restriction de t à $(\Sigma, 0)$ soit finie.
Alors il existe un voisinage ouvert de Stein X de l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et un disque D de centre 0 dans $\mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. Chaque composante irréductible de $S := \{x \in X/\ f(x) = 0 \text{ et } df_x = 0\}$ contient l'origine, est non singulière en dehors de l'origine et est un disque topologique.

2. La restriction $t_{|\Sigma} : \Sigma \to D$ est un revêtement ramifié fini dont la restriction $t_{|\Sigma^*} : \Sigma^* \to D^*$ est un revêtement non ramifié, où nous avons posé $\Sigma^* := \Sigma \setminus \{0\}$ et $D^* := D \setminus \{0\}$.

L'existence de tels voisinages ouverts X et D de 0 dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et $\mathbb{C}$ arbitrairement petits est élémentaire. L'existence, pour un germe f donné, de germes holomorphes auxiliaires convenables est conséquence du lemme suivant

Lemme 2.1.1 *Soit f un germe de fonction holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ dont le lieu singulier S est de dimension 1. Pour $l \in (\mathbb{C}^{n+1})^*$ dans un ouvert dense, le lieu critique Σ_l du germe d'application $(f,l) : (\mathbb{C}^{n+1},0) \to (\mathbb{C}^2,0)$ est de dimension 1 et contient S; on a donc l'égalité $\Sigma_l = S$ au voisinage de S^*.*
De plus, on peut demander que la restriction de l à Σ_l soit propre et finie avec un unique point de ramification à l'origine.
Un tel l étant fixé, il existe un disque ouvert D centré à l'origine dans $\mathbb{C}$ assez petit, tel que la famille $(f_\tau)_{\tau\in D}$, où $f_\tau := f_{|\{l=\tau\}}$, soit sur D^* une famille à $\mu-$constant le long de chaque composante connexe de S^*.

PREUVE. Comme $(S,0)$ est par hypothèse un germe de courbe, pour $l \in (\mathbb{C}^{n+1})^*$ générique on aura $\{l=0\} \cap S = \{0\}$. Si, par exemple, $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ est une suite régulière en 0, toute forme linéaire d'un ouvert dense dans un voisinage ouvert assez petit de la forme linéaire $x \mapsto x_0$ sera telle que le lieu critique de l'application (f,l) sera de dimension 1 et n'aura pas de composante irréductible contenue dans $\{l=0\}$. On aura donc un ouvert dense sur lequel les deux premières conditions de l'énoncé sont réalisées avec, de plus, le fait que chaque fonction f_t ne présente que des points singuliers isolés dans l'hyperplan $\{l=t\}$ pour tout t assez voisin de 0.
Le fait que μ reste localement constant sur S^* au voisinage de l'origine est alors conséquence du fait que le faisceau $l_*(\Omega^n_{/l}/d_{/l}f \wedge \Omega^{n-1}_{/l})$ est cohérent sur $\mathcal{O}_D$ et donc localement libre en dehors de l'origine, puisque la restriction de l au support de ce faisceau cohérent est finie. ■

2.2 Rappels.

Rappelons maintenant quelques constructions et quelques résultats donnés dans [B.II] pour l'étude de la "situation considérée".

R.1. Définissons le faisceau des formes $t-$relatives

$$\Omega^\bullet_/ := \Omega^\bullet_X / dt \wedge \Omega^{\bullet-1}_X$$

la différentielle $t-$relative étant induite par la différentielle de de Rham sur le quotient. Comme la fonction t est non singulière on a un scindage naturel

$$\Omega_X^\bullet \simeq dt \wedge \Omega_X^{\bullet-1} \oplus \Omega_/^\bullet$$

ainsi qu'un isomorphisme différentiel gradué

$$\wedge dt : \Omega_/^\bullet \to dt \wedge \Omega_X^\bullet.$$

Il est intéressant de remarquer que dans la suite exacte de cohomologie de la suite exacte courte de complexes

$$0 \to (\Omega_/^\bullet, d_/^\bullet)[-1] \overset{\wedge dt}{\to} (\Omega_X^\bullet, d^\bullet) \to (\Omega_/^\bullet, d_/^\bullet) \to 0$$

le connecteur s'identifie à la dérivation $\partial/\partial t$.
On a exactitude en degrés strictement positifs du complexe $(\Omega_/^\bullet, d_/^\bullet)$.
On a également exactitude en degrés $d \in [1, n-1]$ du complexe $(\Omega_/^\bullet, (\wedge d_/ f)^\bullet)$ grâce à la finitude de $t : \Sigma \to D$.
Ces propriétés s'etendent immédiatement au complété formel $\hat{\Omega}^\bullet$ en f.

R.2. Introduisons maintenant le sous-complexe $(\hat{K}er\, d_/ f)^\bullet, d_/^\bullet)$ du complexe $(\hat{\Omega}_/^\bullet, d_/^\bullet)$ où $(\hat{K}er\, d_/ f)^\bullet$ est le noyau de la multiplication extérieure

$$\wedge d_/ f : \hat{\Omega}_/^\bullet \to \hat{\Omega}_/^{\bullet+1}.$$

Nous noterons respectivement par $\mathcal{E}$ et $\mathbb{E}$ les faisceaux de cohomologie de ce complexe en degrés 1 et n. Ils sont naturellement munis d'opérations a et b vérifiant $a.b - b.a = b^2$ déduites de la multiplication par f et de $\wedge d_/ f \circ (d_/)^{-1}$. Celles-ci commutent à l'action naturelle de $t^{-1}(\mathcal{O}_D)$ sur ces faisceaux.
On remarquera que la complétion formelle fait que ces faisceaux, à priori portés par Σ, sont à support dans S puisque $S = \Sigma \cap \{f = 0\}$, grâce à notre hypothèse sur t. En effet un germe de courbe irréductible $(\Gamma, 0)$ contenu dans $\Sigma \cap \{f = 0\}$ vérifie ou bien $(\Gamma, 0) \subset (S, 0)$ ou bien $\Gamma \cap S = \{0\}$. Dans ce dernier cas, $\Gamma \setminus \{0\}$ est connexe et contenue dans l'ouvert lisse $\{df \neq 0\}$ de $\{f = 0\}$, et la fonction $t_{|\Gamma\setminus\{0\}}$ est localement constante, donc identiquement nulle. On en déduit que $(\Gamma, 0) \subset (\Sigma, 0) \cap \{t = 0\} = \{0\}$, ce qui est absurde. D'où notre assertion.

Le théorème suivant a été établi dans [BII].

Théorème 2.2.1 *([B.II] th. 4.2.1.) Dans la "situation considérée" au début de cette section, les faisceaux de cohomologie du complexe* $(\hat{K}er\, d_/ f)^\bullet, d_/^\bullet)$ *sont nuls en degrés différents de* 1 *et* n*. En degré* 1 *et* n *les faisceaux* $\mathcal{E}$ *et* $\mathbb{E}$ *sont des* $t^{-1}(\mathcal{O}_D[[b]])-$*modules cohérents, localement libres sur* S^**, si le disque* D *est assez petit.*

R.3. Dans la "situation considérée" définissons le morphisme de faisceaux de $\mathbb{C}-$espaces vectoriels sur S

$$\nabla : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$$

en posant

$$\nabla[d_{/}\xi] := [d_{/}f \wedge \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}.d\xi].$$

La vérification du fait que ce morphisme de faisceaux est bien défini est facile. Les propriétés suivantes sont démontrées dans [B.II] lemme 4.2.5 et proposition 4.2.8.

Proposition 2.2.2 *Soit* $\mathbb{P} := \{x \in \mathbb{E} \ / \ \nabla(x) \in b.\mathbb{E}\}$. *C'est un sous-*$t^{-1}(\mathcal{O}_D[[b]])-$*module de* $\mathbb{E}$ *qui est stable par* a. *Le morphisme de faisceaux*

$$b^{-1}.\nabla : \mathbb{P} \to \mathbb{E}$$

induit par ∇ *est une* $t^{-1}(\mathcal{O}_D)-$*connexion qui commute à* a *et* b.
Son noyau et son conoyau sont respectivement canoniquement isomorphes comme $\hat{\mathcal{A}}-$*modules aux faisceaux de cohomologie* $\hat{\mathcal{H}}^n$ *et* $\hat{\mathcal{H}}^{n+1}$ *du complexe* $(\hat{K}er\, df^\bullet, d^\bullet)$.

L'algèbre $\hat{\mathcal{A}}$ qui n'intervient ici essentiellement que pour traduire la compatibilité aux opérations a et b de cet isomorphisme, a été définie (brièvement) au 1.2.1. Pour plus de détails sur cette algèbre nous renvoyons le lecteur à [B.95].

2.3 La $b^{-1}.\nabla-$finitude.

Le contrôle du noyau de ∇ sera obtenu grâce à la propriété suivante.

Définition 2.3.1 *On dira que* $\mathbb{E}$ *est* $b^{-1}\nabla-$**fini** *si, localement sur* D^*, *il existe un entier* N *et un sous-*$t^{-1}(\mathcal{O}_D[[b]])-$*module cohérent* $\hat{G}$ *de* $\mathbb{P}$ *qui est stable par* $b^{-1}\nabla$ *et contient* $b^N.\mathbb{E}$.

Proposition 2.3.2 *Il existe sur* D *un plus grand sous-*$t^{-1}(\mathcal{O}_D[[b]])-$*module* $\mathbb{G}$ *de* $\mathbb{P}$, *stable par* $b^{-1}\nabla$.
Il vérifie de plus les propriétés suivantes :

(1) On a $\mathbb{G} = \{x \in \mathbb{E} \ / \ \forall \nu \in \mathbb{N} \quad \nabla^\nu(x) \in b^\nu.\mathbb{E}\}$.

(2) Si $x \in \mathbb{E}$ *vérifie* $b^{-1}\nabla(x) \in \mathbb{G} + t^{-1}(\mathcal{O}_D[[b]]).x$ *alors* $x \in \mathbb{G}$.
En particulier on a $Ker\nabla \subset \mathbb{G}$.

(3) Si des germes $\varphi \in \mathcal{O}_D \setminus \{0\}$ *et* $x \in \mathbb{E}$ *sont tels que* $t^{-1}(\varphi).x \in \mathbb{G}$ *alors* $x \in \mathbb{G}$.

(4) Si des germes $\varphi \in \mathcal{O}_D \setminus \{0\}$ *et* $x \in \mathbb{G}$ *sont tels que* $t^{-1}(\varphi).x \in b.\mathbb{G}$ *alors* $x \in b.\mathbb{G}$.

Supposons maintenant que $\mathbb{E}$ *soit* $b^{-1}\nabla-$*fini sur* S^*. *Alors* $\mathbb{G}$ *est* $t^{-1}(\mathcal{O}_D[[b]])$ *localement libre de rang fini sur* S^* *et il est stable par* a. *De plus il vérifie les deux propriétés suivantes:*

i) Le sous-faisceau $Ker\,\nabla$ *est localement constant sur* S^*, *de fibre un (a,b)-module régulier géométrique.*

ii) Soit $U \subset D^*$ *un ouvert connexe et simplement connexe, et soit* $V \subset S^*$ *une composante connexe de* $t^{-1}(U)$. *On a un isomorphisme*

$$\Gamma(V, \mathbb{G}) \simeq \Gamma(V, Ker\,\nabla / b.Ker\,\nabla) \otimes_{\mathbb{C}} t^{-1}(\mathcal{O}_{D^*}(U)[[b]]).$$

Remarque. Précisons que $\mathbb{G}$ est maximal au sens suivant : pour tout ouvert $\Omega \subset D$ et tout sous-faisceau Γ de $\mathcal{O}_D[[b]]-$modules de $\mathbb{P}_{|\Omega}$ stable par $b^{-1}.\nabla$ on aura $\Gamma \subset \mathbb{G}$. □

Preuve. Notons $\mathbb{G}_k := \{x \in \mathbb{E} \ / \ \forall \nu \in [0,k] \quad \nabla^\nu(x) \in b^\nu.\mathbb{E}\}$, pour $k \in \mathbb{N}$. On a donc $\mathbb{G} = \cap_{k\geq 0}\, \mathbb{G}_k$. Comme $\mathbb{G}_k$ est manifestement stable par b, pour voir que $\mathbb{G}_k$ est un sous-$\mathcal{O}_D[[b]]-$module, il suffit de voir qu'il est stable par l'action de $t^{-1}(\mathcal{O}_D)$. Pour $\varphi \in \mathcal{O}_D$ et $x \in \mathbb{E}$ on a (en oubliant de noter l'image réciproque par t)

$$\nabla^\nu(\varphi.x) = \sum_{j=0}^{\nu} C_\nu^j.\varphi^{(j)}.b^j.\nabla^{\nu-j}(x) \tag{@}$$

où $\varphi^{(j)}$ désigne la dérivée $j-$ème de φ.
Cette formule montre que si $x \in \mathbb{G}_k$ on aura $\varphi.x \in \mathbb{G}_k$.
L'inclusion de tout sous-$t^{-1}(\mathcal{O}_D[[b]])-$module stable par $b^{-1}\nabla$ dans $\mathbb{G}$ est immédiate.
Pour prouver (1) il suffit donc de montrer que $\mathbb{G}$ est stable par $b^{-1}\nabla$. Or

$$\nabla(\mathbb{G}_k) = \{\nabla(x) \ / x \in \mathbb{G}_k\} \subset \{y \in \mathbb{E} \ / \ \nabla^\nu(y) \in b^{\nu+1}\mathbb{E} \quad \forall \nu \in [0, k-1]\}$$

et ce dernier groupe est égal à

$$\{bz \ / \ z \in \mathbb{E} \ / \ \nabla^\nu(z) \in b^\nu.\mathbb{E} \quad \forall \nu \in [0, k-1]\} = b.\mathbb{G}_{k-1}.$$

On a donc bien $\nabla(\mathbb{G}) \subset b.\mathbb{G}$.
Si $x \in \mathbb{E}$ vérifie $b^{-1}\nabla(x) \in \mathbb{G} + t^{-1}(\mathcal{O}_D[[b]]).x$ considérons $G := t^{-1}(\mathcal{O}_D[[b]]).x + \mathbb{G}$. On a alors, pour $y \in \mathbb{G}$,

$$\nabla(t^{-1}(\alpha).x + y) \in t^{-1}(\alpha').bx + t^{-1}(\alpha).\nabla(x) + b.\mathbb{G} \subset b.(t^{-1}(\mathcal{O}_D[[b]]).x + \mathbb{G})$$

où α' désigne la dérivée en t de $\alpha \in \mathcal{O}_D[[b]]$. Ceci montre que $G = \mathbb{G}$ et donc que $x \in \mathbb{G}$. Ceci montre (2).
Si maintenant on a $t^{-1}(\varphi).x \in \mathbb{G}$ avec $\varphi \in \mathcal{O}_D \setminus \{0\}$ et $x \in \mathbb{E}$ montrons par récurrence sur $\nu \in \mathbb{N}$ que l'on a $\nabla^\nu(x) \in b^\nu.\mathbb{E}$. La propriété étant claire pour $\nu = 0$ supposons-la vraie pour $\nu - 1$ et montrons-la pour ν. Comme

on a la relation (@) on déduit de l'hypothèse $t^{-1}(\varphi).x \in \mathbb{G}$ et de l'hypothèse de récurrence que $t^{-1}(\varphi).\nabla^\nu(x) \in b^\nu.\mathbb{E}$. Mais sur D^* le faisceau $\mathbb{E}/b^\nu.\mathbb{E}$ est localement $t^{-1}(\mathcal{O}_D)-$libre[1] on en déduit que $\nabla^\nu(x) \in b^\nu.\mathbb{E}$. On en conclut que $x \in \mathbb{G}$, ce qui achève la preuve du point (3).
Le point (4) se montre de la même façon en utilisant l'égalité (déjà vue plus haut)

$$b.\mathbb{G} = \{x \in \mathbb{E} \ / \ \forall \nu \in \mathbb{N} \quad \nabla^\nu(x) \in b^{\nu+1}.\mathbb{E}\}.$$

Supposons maintenant que $\mathbb{E}$ est $b^{-1}\nabla-$fini.
Comme nos assertions sont locales sur S^*, nous pouvons nous placer au-dessus d'un disque $U \subset D^*$, considérer une composante connexe V de $t^{-1}(U)$ et supposer que l'on ait sur V un sous-$\mathcal{O}_D[[b]]-$module cohérent $\hat{G}$ contenant $b^N.\mathbb{E}_{|V}$ et stable par $b^{-1}.\nabla$.
Pour simplifier les notations, nous identifierons U et V via t.

Étape 1. On se ramène au cas où le $\mathcal{O}_D-$module $\mathbb{P}/\hat{G}$ est libre sur V et de rang noté p, et où, de plus, il est facteur direct du $\mathcal{O}_D-$module libre $\mathbb{E}/\hat{G}$ dont le rang sur V sera noté $p+q$. Ceci est montré dans le lemme suivant.

Lemme 2.3.3 *On se place dans la situation précisée ci-dessus. Il existe un sous-$\mathcal{O}_D[[b]]-$module $\tilde{G}$ cohérent stable par $b^{-1}.\nabla$ qui contient $\hat{G}$ et qui vérifie de plus les propriétés suivantes :*

a) Le $\mathcal{O}_D-$module $\mathbb{P}/\tilde{G}$ est libre.

b) La suite exacte de $\mathcal{O}_D-$modules

$$0 \to \mathbb{P}/\tilde{G} \to \mathbb{E}/\tilde{G} \to \mathbb{E}/\mathbb{P} \to 0$$

est scindée.

Preuve. Le quotient $\mathbb{P}/\hat{G}$ est $\mathcal{O}_D-$cohérent puisque $\hat{G}$ contient $b^N.\mathbb{P}$. Donc sa $\mathcal{O}_D-$torsion T est cohérente sur $\mathcal{O}_D$. Si $\pi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}/\hat{G}$ est l'application quotient, définissons

$$\tilde{G} : \pi^{-1}(T).$$

Il est $\mathcal{O}_D[[b]]-$cohérent comme noyau et la propriété a) est évidente. Il contient $\hat{G}$ par définition. Montrons la stabilité par $b^{-1}.\nabla$.
Le problème est local au voisinage de chaque point t_0 appartenant au support du faisceau T, support qui est fermé et discret dans V. Près d'un tel point, on aura

[1]car c'est le cas pour $\nu = 1$ et donc pour tout ν en raisonnant par récurrence sur la suite exacte

$$0 \to b^k.\mathbb{E}/b^{k+1}.\mathbb{E} \to \mathbb{E}/b^{k+1}.\mathbb{E} \to \mathbb{E}/b^k.\mathbb{E} \to 0.$$

puisque $b^k : \mathbb{E}/b.\mathbb{E} \to b^k.\mathbb{E}/b^{k+1}.\mathbb{E}$ est un isomorphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_D-$modules.

$x \in \tilde{G}_{t_0}$ si et seulement si il existe un entier $k \geq 1$ tel que l'on ait $(t-t_0)^k.x \in \hat{G}$. Alors l'égalité

$$(t-t_0)^{k+1}.b^{-1}.\nabla(x) = b^{-1}.\nabla((t-t_0)^{k+1}.x) - (k+1).(t-t_0)^k.x$$

montre que $b^{-1}.\nabla(x) \in \tilde{G}$ puisque $\hat{G}$ est stable par $b^{-1}.\nabla$.
Le scindage de la suite exacte est conséquence du fait que le $\mathcal{O}_D-$module $\mathbb{E}/\mathbb{P}$ est libre. En effet si on a $\varphi.x \in \mathbb{P}$ avec $\varphi \neq 0$, cela signifie que $\nabla(\varphi.x) = \varphi'.bx + \varphi.\nabla(x) \in b.\mathbb{E}$, c'est à dire que $\varphi.\nabla(x) \in b.\mathbb{E}$. Comme $\mathbb{E}/b.\mathbb{E}$ est sans $\mathcal{O}_D-$torsion, cela signifie que $\nabla(x) \in b.\mathbb{E}$ c'est à dire que $x \in \mathbb{P}$. ■

On remplacera dans la suite $\hat{G}$ par $\tilde{G}$ mais en continuant à le noter $\hat{G}$.
Ayant choisi ces trivialisations, la connexion

$$b^{-1}.\nabla : \mathbb{P}/\hat{G} \to \mathbb{E}/\hat{G}$$

se lit comme une $\mathcal{O}_D-$connexion associée à l'inclusion naturelle de $\mathcal{O}_D^p$ dans $\mathcal{O}_D^p \oplus \mathcal{O}_D^q$

$$\partial : \mathcal{O}_D^p \to \mathcal{O}_D^p \oplus \mathcal{O}_D^q$$

sur le disque V.

Deuxième étape. Elle est donnée par le lemme simple suivant.

Lemme 2.3.4 *Soit*

$$\partial : \mathcal{O}_D^p \to \mathcal{O}_D^p \oplus \mathcal{O}_D^q$$

une $\mathcal{O}_D-$connexion sur un disque $V \subset D$. Alors $Ker\partial$ est un sous-faisceau constant de $\mathbb{C}_D-$modules de $\mathcal{O}_D^p$ de rang au plus égal à p et le plus grand sous-faisceau de $\mathcal{O}_D-$module stable par ∂ est égal à $\mathcal{O}_D.Ker\partial$. Il est donc libre et facteur direct dans $\mathcal{O}_D^p$.

Preuve. Soit $\pi : \mathcal{O}_D^p \oplus \mathcal{O}_D^q \to \mathcal{O}_D^p$ la projection. Alors $\pi \circ \partial$ est une connexion sur $\mathcal{O}_D^p$ au-dessus du disque V. Soit $e := (e_1, \cdots, e_p)$ une base horizontale pour cette connexion. Notons $\varepsilon := (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_q)$ la base canonique de $\mathcal{O}_D^q$. Définissons alors la matrice holomorphe $M : V \to L(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^q)$ par la formule

$$\partial e = M.\varepsilon.$$

Pour $X \in \mathcal{O}_D^p$ on aura

$$\partial({}^tX.e) = {}^tX'.e \oplus {}^tX.M.\varepsilon \ ,$$

où X' désigne la dérivée de X. On en déduit que ${}^tX.e \in Ker\partial$ si et seulement si $X \in \mathbb{C}^p$ et vérifie ${}^tX.M \equiv 0$ sur V. Ceci définit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^p$ et montre donc la première assertion.
Les autres assertions sont immédiates. ■

TROISIÈME ÉTAPE. Posons maintenant, avec les notations précédentes

$$G := \mathcal{O}_D[[b]].Ker\partial + \hat{G}.$$

Alors G est $\mathcal{O}_D[[b]]-$cohérent comme somme de deux sous-faisceaux cohérents de $\mathbb{P}$ qui est cohérent (voir [B.II] 7.2). Comme $\mathbb{G}/\hat{G}$ est un sous-$\mathcal{O}_D-$module de $\mathbb{P}/\hat{G}$ qui est stable par ∂, on aura, d'après le lemme 2.3.4

$$\mathbb{G} \subset G.$$

Mais G est un sous-$\mathcal{O}_D[[b]]-$module de $\mathbb{P}$ stable par $b^{-1}.\nabla$. En effet, si $x \in G$, comme on a

$$b^{-1}.\nabla(x) \in b^{-1}.\nabla(\hat{G}) + \mathcal{O}_D.Ker\partial + \hat{G} \subset G.$$

On en conclut que $G = \mathbb{G}$ sur l'ouvert V. Ceci donne alors la cohérence de $\mathbb{G}$ sur $\mathcal{O}_D[[b]]$. Comme le faisceau $\mathbb{G}/b.\mathbb{G}$ est sans $\mathcal{O}_D-$torsion d'après la propriété (4) prouvée plus haut, on en conclut que $\mathbb{G}$ est (localement) libre de rang fini sur $\mathcal{O}_D[[b]]$. De plus, d'après la propriété (2) il contient $Ker\nabla$.
Pour conclure, il suffit alors d'appliquer le théorème de Cauchy à la $\mathcal{O}_D[[b]]-$connexion $b^{-1}.\nabla$ de $\mathbb{G}$. ■

3 Intégration "à la Malgrange".

Ce chapitre est, bien sûr, directement inspiré de [M. 74].

3.1 Complexe de de Rham absolu et $b^{-1}.\nabla$.

Le lien entre le complexe de de Rham absolu $(\hat{K}er\ df)^\bullet, d^\bullet)$ et la connexion $b^{-1}.\nabla$ introduite plus haut est précisé par le lemme suivant

Lemme 3.1.1 *Soit n un entier au moins égal à 2. On a un morphisme de complexes*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & (\hat{K}er\ df)^{n-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d] & (\hat{K}er\ df)^{n} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\alpha"] & (\hat{K}er\ df)^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{P} \arrow[r, "b^{-1}\nabla"] & \mathbb{E} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où α est induite par la projection "évidente" de $\hat{\Omega}^n$ sur $\hat{\Omega}^n_/$ et où β est l'inverse de l'isomorphisme $\wedge dt : \hat{\Omega}^n_/ \to \hat{\Omega}^{n+1}$. Il induit des isomorphismes (a,b)-linéaires sur les faisceaux de cohomologie, si on remplace $(\hat{K}er\ df)^0$ par $(\hat{K}er\ df)^1 \cap Ker\ d$ en degré 0 dans le premier complexe (avec l'inclusion évidente).

Preuve. Vérifions déjà les égalités $\alpha \circ d = 0$ et $\beta \circ d = b^{-1}\nabla \circ \alpha$.
Si $u + dt \wedge v$ est dans $(\hat{K}er\ df)^{n-1}$ avec $u \in \hat{\Omega}^{n-1}_/$ et $v \in \hat{\Omega}^{n-2}_/$, on aura

$d_/ f \wedge u = 0$ et $(\alpha \circ d)(u + dt \wedge v) = d_/ u$. On trouve donc bien zéro dans $\mathbb{P} \subset \mathbb{E}$.
Pour $d_/ \xi + dt \wedge \eta \in (\hat{K}er\ df)^n$ on aura

$$(\beta \circ d)(d_/ \xi + dt \wedge \eta) = \beta(dt \wedge (\frac{\partial d_/ \xi}{\partial t} - d_/ \eta)) = \frac{\partial d_/ \xi}{\partial t} - d_/ \eta = d_/ (\frac{\partial \xi}{\partial t} - \eta).$$

La condition $df \wedge (d_/ \xi + dt \wedge \eta) = 0$ donne $\frac{\partial f}{\partial t}.d_/ \xi = d_/ f \wedge \eta$ et on a donc

$$\nabla(\alpha(d_/ \xi + dt \wedge \eta)) = \nabla(d_/ \xi) = d_/ f \wedge (\frac{\partial \xi}{\partial t} - \eta)$$

ce qui donne bien l'égalité désirée.
La fin de la preuve consiste alors à vérifier que les morphismes induits en cohomologie coïncident avec ceux de la proposition 1.1.1. Cette vérification simple est laissée au lecteur. ■

3.2 Dérivations d'intégrales

Comme près du point $p \in S^*$ la famille des fonctions à singularités isolées donnée par $t \to f_t$ est à $\mu-$constant elle est topologiquement triviale au voisinage de p. En identifiant S^* et D^* via la fonction t au voisinage de p, on a donc l'existence d'un voisinage U de p dans X et une application continue $\Phi : U \to U_p := t^{-1}(t(p)) \cap U$ donnant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\Phi \times t} & U_p \times \Delta \\ \downarrow{\scriptstyle f \times t} & & \downarrow{\scriptstyle f \times Id} \\ D \times \Delta & \xrightarrow{=} & D \times \Delta \end{array}$$

où $(\Phi \times t)$ est un homéomorphisme et U_p une boule de Milnor en p pour la restriction f_p de f à l'hyperplan $t^{-1}(t(p))$.
Soit $\gamma \in H_{n-1}(\{f = \varepsilon\} \cap U_p, \mathbb{C})$, pour $\varepsilon > 0$ assez petit. On a pour $0 < |s| < \varepsilon$ et t assez voisin de $t(p))$ une famille horizontale multiforme de $(n-1)-$cycles compacts contenus dans les fibres $\{f(t,x) = s\} \cap U$.
Étant donnée une section ω du faisceau $\mathbb{E}$ sur un voisinage ouvert de $p \in S^*$, nous définirons les intégrales "à la Malgrange"

$$\int_{\gamma_{s,t}} \frac{\omega}{d_/ f}.$$

On remarquera déjà qu'une telle intégrale ne dépend que de la classe de ω dans $\mathbb{E}$ en raison de la formule de Stokes, puisque

$$\mathbb{E} = \hat{\Omega}^n_/ / d_/ (\hat{K}er\, d_/ f^{n-1}) = \hat{\Omega}^n_/ / d_/ f \wedge d_/ \hat{\Omega}^{n-2}_/.$$

La proposition suivante exprime les dérivées partielles en s et t de ces fonctions holomorphes en (s,t) qui sont multivaluées en s.

Proposition 3.2.1 *Pour tout* $d_/\xi \in \mathbb{E}$ *on a la formule de dérivation "en s"*

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big(\int_{\gamma_{s,t}} \xi\Big) = \int_{\gamma_{s,t}} \frac{d_/\xi}{d_/f}$$

que l'on peut lire sous la forme

$$\textit{primitive "en s" de } \Big(\int_{\gamma_{s,t}} \frac{d_/\xi}{d_/f}\Big) = \int_{\gamma_{s,t}} \frac{d_/f \wedge \xi}{d_/f} = \int_{\gamma_{s,t}} \frac{b(d_/\xi)}{d_/f} \ .$$

Pour tout $d_/\xi \in \mathbb{E}$ *on a la formule de dérivation "en t"*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_{\gamma_{s,t}} \xi\Big) = \int_{\gamma_{s,t}} \frac{\nabla(d_/\xi)}{d_/f}$$

que l'on peut lire sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_{\gamma_{s,t}} \frac{d_/\xi}{d_/f}\Big) = \int_{\gamma_{s,t}} \frac{b^{-1}\nabla(d_/\xi)}{d_/f}$$

pour $d_/\xi \in \mathbb{P}$.

Preuve. Soit $\Delta \subset \mathbb{H} \times \mathbb{C}$ un polydisque. L'hypothèse de trivialité topologique permet de trouver $\psi \in \mathcal{C}^{\infty,n-1}_{c/f}(f^{-1}(\Delta))$ une $(n-1)-$forme $d-$fermée induisant pour chaque $(s,t) \in \Delta$ la classe définie par $\gamma_{s,t}$ dans

$$H^{n-1}_c(f_t^{-1}(s) \cap U, \mathbb{C}) \simeq H_{n-1}(f_t^{-1}(s) \cap U, \mathbb{C}).$$

Pour $\xi \in \Omega^{n-1}_/$ posons

$$F(s,t) := \int_{\gamma_{s,t}} \xi \ = \int_{f_t^{-1}(s)} \xi \wedge \psi \qquad \forall (s,t) \in \Delta.$$

Commençons par prouver l'holomorphie de F sur Δ. Comme F est manifestement une fonction continue, il suffit de prouver que son $\bar\partial$ au sens des distributions est nul. Considérons alors une forme test $\theta \in \mathcal{C}^{\infty,(2,1)}_c(\Delta)$. On a

$$< \bar\partial F, \theta >= - < F, \bar\partial\theta >= - \int_{f^{-1}(\Delta)} \xi \wedge \psi \wedge d(f^*(\theta))$$

puisque $\bar\partial\theta = d\theta$ et puisque loin du lieu critique de f le théorème de Fubini banal s'applique à des fonction continues. Comme on a

$$d(\xi \wedge \psi \wedge f^*(\theta)) = \xi \wedge \psi \wedge d(f^*(\theta)))$$

puisque $d\psi = 0$ et que $d\xi \wedge f^*(\theta)$ est de type $(n+2,1)$ donc nulle, la formule de Stokes permet de conclure à l'holomorphie de F.

Pour calculer $\frac{\partial F}{\partial s}$ au sens des distributions, considérons maintenant une forme test $\zeta \in \mathcal{C}_c^{\infty,(0,2)}(\Delta)$. On aura

$$< \frac{\partial F}{\partial s}.ds, dt \wedge \zeta >= - < F, d(dt \wedge \zeta) >= - \int_{f^{-1}(\Delta)} \xi \wedge \psi \wedge d(f^*(dt \wedge \zeta)).$$

Comme on a $d\xi = d_/\xi + dt \wedge \frac{\partial \xi}{\partial t}$ la formule de Stokes donne

$$< \frac{\partial F}{\partial s}.ds, dt \wedge \zeta >= \int_{f^{-1}(\Delta)} d_/\xi \wedge \psi \wedge f^*(dt \wedge \zeta).$$

Le théorème de Fubini donne alors

$$< \frac{\partial F}{\partial s}.ds, dt \wedge \zeta >= \int_{\Delta} \Big(\int_{f_t^{-1}(s)} \frac{d_/\xi}{d_/f} \wedge \psi \Big).ds \wedge dt \wedge \zeta$$

ce qui donne bien notre formule de dérivation "en s".
Soit ζ une forme-test choisie comme plus haut. On a

$$< \frac{\partial F}{\partial t}.dt, ds \wedge \zeta >= - < F, d(ds \wedge \zeta) >= - \int_{f^{-1}(\Delta)} \xi \wedge \psi \wedge d(f^*(ds \wedge \zeta)).$$

La formule de Stokes donne alors

$$< \frac{\partial F}{\partial t}.dt, ds \wedge \zeta >= \int_{f^{-1}(\Delta)} \frac{\partial \xi}{\partial t} \wedge dt \wedge \psi \wedge d_/f \wedge f^*(\zeta) + d_/\xi \wedge \psi \wedge \frac{\partial f}{\partial t}.dt \wedge f^*(\zeta)$$

puisque $f^*(ds) = df = d_/f + \frac{\partial f}{\partial t}.dt$. On trouve alors, puisque

$$\nabla(d_/\xi) = d_/f \wedge \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}.d_/\xi$$

$$< \frac{\partial F}{\partial t}.dt, ds \wedge \zeta >= \int_{f^{-1}(\Delta)} \nabla(d_/\xi) \wedge \psi \wedge dt \wedge f^*(\zeta).$$

On a donc bien, à nouveau grâce au théorème de Fubini, la formule annoncée, pour $d_/\xi \in \mathbb{E}$:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(s,t) = \int_{\gamma_{s,t}} \frac{\nabla(d_/\xi)}{d_/f}.$$

Remarquons que si $I : \mathbb{E} \to \mathcal{O}_{\mathbb{H}\times\mathbb{C}}$ est le morphisme de faisceau localement défini par $[d_/\xi] \to \int_{\gamma_{s,t}} \frac{d_/\xi}{d_/f}$, on a établi les égalités suivantes :

$$(\partial_s)_\circ I_\circ b = I \quad \text{et} \quad (\partial_t)_\circ I = I_\circ(b^{-1}\nabla)$$

de morphismes de faisceaux respectivement de $\mathbb{E}$ à valeurs dans $\mathcal{O}_{\mathbb{H}\times\mathbb{C}}$ et de $\mathbb{P}$ à valeurs dans $\mathcal{O}_{\mathbb{H}\times\mathbb{C}}$. ■

Reprenons les notations introduites au début de ce paragraphe. Le lemme suivant montre que les intégrales sur les cycles déterminent une section du faisceau $\mathbb{E}$.

Lemme 3.2.2 *Soit p un point de S^* et soit θ un germe en p de section du faisceau $\mathbb{E}$ tel que pour tout couple (s,t) assez voisin de $(0,t(p))$ dans $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ on ait*

$$\int_{\gamma^j_{s,t}} \frac{\theta}{d_/ f} \equiv 0$$

pour une base horizontale $\gamma^j_{s,t}$ déduite d'une base de l'espace vectoriel

$$H_{n-1}(\{f=\varepsilon\} \cap U, \mathbb{C}) \simeq H_{n-1}(\{f=\varepsilon\} \cap \{t=t(p)\} \cap U, \mathbb{C}).$$

Alors on a $\theta = 0$ dans $\mathbb{E}$.

Preuve. D'après notre hypothèse, pour chaque t_0 fixé assez voisin de $t(p)$ la section du fibré de Gauss-Manin de la fonction f_{t_0} sur l'hyperplan $\{t = t_0\}$, induite par $\theta_{|\{t=t_0\}}$, est de torsion. Comme la fonction f_{t_0} a une singularité isolée en $p(t_0) := S^* \cap t^{-1}(t_0)$, son fibré de Gauss-Manin est sans torsion d'après [S. 70], et on a donc que la valeur de θ en $p(t_0)$ est nulle, c'est à dire que l'image de θ dans $\mathbb{E}/(t-t_0).\mathbb{E}$ est nulle. Comme ceci a lieu pour tout t_0 assez voisin de $t(p)$ et comme le faisceau $\mathbb{E}$ est localement libre de rang fini sur $t^{-1}(\mathcal{O}_D[[b]])$ sur S^*, on en conclut que θ est nulle au voisinage de p. ■

4 Le théorème de $b^{-1}.\nabla-$finitude sur S^*.

4.1 Preuve du théorème de finitude.

Le théorème 1.1.2 sera une conséquence simple du résultat suivant.

Théorème 4.1.1 *Dans la "situation considérée" précisée au début du chapitre 2, $\mathbb{E}$ est $b^{-1}.\nabla-$fini sur S^*.*

Reprenons les notations du paragraphe 3.2.
Notons $q : \hat{\Omega}^\bullet \to \hat{\Omega}^\bullet_/$ l'application quotient et remarquons que l'on a l'égalité $d_/ \circ q = q \circ d$. Nous noterons encore par $d_/ : \hat{\Omega}^\bullet \to \hat{\Omega}^{\bullet+1}_/$ cette application composée. Donc pour $\omega \in \hat{\Omega}^{n-1}$ nous aurons l'élément $[d_/\omega] \in \mathbb{E}$.
Si les formes $\omega, \omega' \in \hat{\Omega}^{n-1}$ vérifient

$$f.d\omega = df \wedge \omega'$$

on aura dans $\mathbb{E}$ la relation $a.[d_/\omega] = b.[d_/\omega']$. Ceci se vérifie facilement en utilisant l'identification de $\Omega^\bullet_/$ avec les formes ne présentant pas l'élément différentiel "dt" et la décomposition

$$\Omega^\bullet = \Omega^\bullet_/ \oplus dt \wedge \Omega^{\bullet-1}_/.$$

Proposition 4.1.2 *Soit $p \in S^*$ et considérons une base de Jordan $e_1, \cdots, e_k$ d'un bloc de Jordan de la monodromie de f pour la valeur propre $exp(2i\pi.u)$ où*

$u \in [0,1[$, agissant sur $H^{n-1}(\{f=\varepsilon\}\cap U,\mathbb{C})$.
Alors il existe un entier $m \geq 0$ et des $(n-1)-$formes holomorphes $\omega_1,\cdots,\omega_k$ sur U vérifiant les propriétés suivantes:

1. *On a sur U les relations $d\omega_j = (m+u)\frac{df}{f}\wedge\omega_j + \frac{df}{f}\wedge\omega_{j-1} \quad \forall j\in[1,k]$ avec la convention $\omega_0 \equiv 0$.*

2. *L'espace vectoriel engendré par les classes de cohomologie induites sur $\{f=\varepsilon\}\cap U$ par les ω_j est égal au sous-espace vectoriel engendré par $e_1,\cdots,e_k$ de $H^{n-1}(\{f=\varepsilon\}\cap U,\mathbb{C})$.*

Dans ces conditions les sections de $\mathbb{E}$ induites par les formes $d_/\omega_j$ sont dans le sous-faisceau $Ker\,\nabla_{|\Delta}$ et le sous-$\mathbb{C}[[b]]-$module qu'elles engendrent est libre de rang k et stable par a. Sa fibre est le (a,b)-module à pôle simple de rang k de $\mathbb{C}[[b]]-$base $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k$ avec $a.\varepsilon_j=(m+u).b.\varepsilon_j+b.\varepsilon_{j-1}$ avec la convention $\varepsilon_0=0$. Le sous-faisceau de $t^{-1}(\mathcal{O}_\Delta[[b]])-$module engendré par $[d_/\omega_1],\cdots,[d_/\omega_k]$ est stable par a et libre de rang k sur $t^{-1}(\mathcal{O}_\Delta[[b]])$. Il est stable par $b^{-1}.\nabla$ et donc contenu dans $\mathbb{G}$.
Si on part d'une base de Jordan complète de l'espace vectoriel $H^{n-1}(\{f=\varepsilon\}\cap U,\mathbb{C})$, le sous-faisceau de $t^{-1}(\mathcal{O}_\Delta[[b]])-$modules ainsi obtenu est encore libre de rang fini.

Remarque. Grâce à notre trivialisation locale, pour chaque $p'\in\Delta$, les restrictions de la base $e_1,\cdots,e_k$ à $\{f_{p'}=\varepsilon\}$ induiront une base de Jordan d'un bloc de Jordan de taille k pour la monodromie de $f_{p'}$ agissant sur $H^{n-1}(\{f_{p'}=\varepsilon\}\cap U,\mathbb{C})$ (resp. une base de Jordan complète de $H^{n-1}(\{f_{p'}=\varepsilon\}\cap U,\mathbb{C})$ si on part d'une base de Jordan complète de $H^{n-1}(\{f=\varepsilon\}\cap U,\mathbb{C})$). $\square$

Preuve. Commençons par remarquer que si $\omega\in\Omega^{n-1}$ on a

$$df\wedge d\omega = dt\wedge\nabla(d_/\omega).$$

Puisque l'on a $df\wedge d\omega_j=0, j\in[1,k]$ les classes $[d_/\omega_j]\in\mathbb{E}$ sont donc bien dans $Ker\,\nabla_{|\Delta}$.
L'existence de l'entier m et des $(n-1)-$formes holomorphes vérifiant les propriétés 1) et 2) résulte de [B.84]. Les sections sur l'ouvert Δ du faisceau $\hat{\mathcal{H}}^n$ induites par les formes $d_/\omega_j$ vérifient les relations :

$$a.[d_/\omega_j]=(m+u).b.[d_/\omega_j]+b.[d_/\omega_{j-1}] \quad \forall j\in[1,k]$$

qui ne sont qu'une réécriture des relations 1).
Montrons l'indépendance sur $\mathcal{O}_D[[b]]$. Si on a, sur un ouvert connexe $\Delta'\subset\Delta$, une relation

$$\sum_{j=1}^{k} s_j.[d_/\omega_j]\in d_/(\Gamma(\Delta',(\hat{K}er\,d_/f)^{n-1})$$

où $s_j\in\Gamma(\Delta',\mathcal{O}_D[[b]])$, pour $j\in[1.k]$, on obtient pour chaque $t\in\Delta'$ une relation sur $\mathbb{C}[[b]]$ des classes correspondantes, ce qui donne la nullité des coefficients pour

chaque $t \in \Delta'$ fixé. En effet, pour $t \in \Delta'$ fixé, ces classes sont indépendantes sur $\mathbb{C}\{f_t\}$ dans le système de Gauss-Manin la fonction f_t grâce à la remarque qui suit l'énoncé de la proposition, et donc aussi dans le module de Brieskorn correspondant puisqu'il est sans torsion d'après [S.70]. On en déduit la même propriété dans son complété formel en f_t par platitude de $\mathbb{C}[[f_t]]$ sur $\mathbb{C}\{f_t\}$, et celui-ci coïncide avec son complété formel en b, qui est le (a,b)-module associé à f_t égal à la fibre en t de $\mathbb{E}$. L'indépendance sur $\mathbb{C}[[b]]$ en résulte.
L'inclusion dans $\mathbb{G}$ est immédiate puisque les $[d_/\omega_j]$ sont dans $Ker\,\nabla$ (voir prop. 2.3.2 (2)).
L'indépendance pour une base de Jordan complète s'obtient de façon analogue. ■

Démonstration du théorème. Compte tenu de la proposition précédente, il nous suffit de montrer qu'il existe localement sur S^* un entier N tel que le $t^{-1}(\mathcal{O}_\Delta[[b]])-$module $\tilde{\mathbb{G}} \subset \mathbb{G}$ construit à partir d'une base de Jordan de la monodromie de f agissant sur l'espace vectoriel $H^{n-1}(\{f = \varepsilon\} \cap U, \mathbb{C})$ vérifie $b^N.\mathbb{E} \subset \tilde{\mathbb{G}}$. Ceci résulte du fait que si l'on considère la construction effectuée, on peut choisir, d'après [B.86], l'entier m au plus égal à n. On obtient alors, pour chaque singularité isolée $f_{p'}$, un réseau $\tilde{\mathbb{G}}_{p'}$ du réseau de Brieskorn $\mathbb{E}_{p'}$ qui vérifie $b^n.\mathbb{E}_{p'} \subset \tilde{\mathbb{G}}_{p'}$. Comme ceci a lieu pour chaque p' assez voisin de p, on en conclut que $b^n.\mathbb{E} \subset \tilde{\mathbb{G}} \subset \mathbb{G}$. ■

4.2 Estimation de $\mathbb{G}$.

La preuve du théorème de $b^{-1}.\nabla-$finitude montre que $\mathbb{G}$ contient $b^n.\mathbb{E}$ sur S^*. Il est intéressant de pouvoir améliorer cette "minoration" de $\mathbb{G}$ dans certains exemples. La proposition ci-dessous donne un tel critère.

Nous allons travailler près d'un point générique de S^*. Choisissons, près d'un tel point, un système de coordonnées locales $t, x_1, \dots, x_n$ tel que l'on ait

$$S^* = \{x_1 = \dots = x_n = 0\}.$$

L'idéal $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{O}_X$ engendré par $x_1, \dots, x_n$ est donc l'idéal réduit de S^*.
Commençons par remarquer que l'on a, localement sur S^*, équivalence entre l'égalité $\mathbb{G} = \mathbb{E}$ et l'appartenance de $\frac{\partial f}{\partial t}$ à $J_/(f)$, l'idéal jacobien relatif de f. En effet, dès que $\frac{\partial f}{\partial t} \notin J_/(f)$, on a $dx \notin \mathbb{P}$ et donc, à fortiori $dx \notin \mathbb{G}$.

Proposition 4.2.1 *Notons $\mathcal{M}^k$, pour $k \geq 1$, l'image de $\mathfrak{M}^k.\hat{\Omega}^n_/$ dans $\mathbb{E}$. Supposons qu'il existe un entier k tel que*

$$\mathfrak{M}^k.\frac{\partial f}{\partial t} \subset \mathfrak{M}^{k+1}.J_/(f). \qquad (*)$$

Alors le plus grand sous-$\mathcal{O}_D[[b]]-$module (cohérent) $\mathbb{G}$ de $\mathbb{E}$, stable par a et $b^{-1}\nabla$ contient $\mathcal{M}^k$.

Preuve. Nous allons montrer que sous notre hypothèse $G := \mathcal{M}^k$ est stable par a et b et il vérifie $\nabla(G) \subset b.G$.
La stabilité par a est évidente. Pour montrer la stabilité par b, nous allons montrer que $b.G$ est l'image dans $\mathbb{E}$ de $\mathfrak{M}^{k+1}.J_/(f).\Omega^n_/$, ce qui implique en particulier la stabilité par b.
Si $\omega = d_/\xi$ avec $\omega \in \mathfrak{M}^k.\Omega^n_/$, on peut choisir $\xi \in \mathfrak{M}^{k+1}.\Omega^{n-1}_/$. On aura alors $b[\omega] = [d_/f \wedge \xi]$ qui est bien dans $\mathfrak{M}^{k+1}.J_/(f).\Omega^n_/$.
Réciproquement, si $\eta \in \mathfrak{M}^{k+1}.J_/(f).\Omega^n_/$ on peut écrire $\eta = d_/f \wedge \xi$ avec $\xi \in \mathfrak{M}^{k+1}.\Omega^{n-1}_/$. Alors $d_/\xi \in \mathfrak{M}^k.\Omega^n_/$ et donne un élement $[d_/\xi] \in G$ dont l'image par b est $[\eta]$. Ceci prouve notre assertion.
On a alors, pour $\omega = d_/\xi$,

$$\nabla(\omega) = d_/f \wedge \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}.\omega.$$

Comme pour $[\omega] \in G$ on peut choisir ξ et donc $\frac{\partial \xi}{\partial t} \in \mathfrak{M}^{k+1}.\Omega^{n-1}_/$, on obtient, grâce à l'inclusion (*), $\nabla(\omega) \in \mathfrak{M}^{k+1}.J_/(f).\Omega^n_/ \subset b.G$. ■

4.3 Exemples.

EXEMPLE 1. On se propose d'étudier le cas où $f(t,x) = P(x) + t.Q(x)$ avec P et Q deux germes de fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^n$.

Lemme 4.3.1 *Supposons P à singularité isolée à l'origine et supposons que l'on ait $\mathfrak{M}^{k+1}.J(Q) \subset \mathfrak{M}^{k+1}.J(P)$ pour un entier $k \geq 0$, où $\mathfrak{M}$ désigne l'idéal maximal de l'origine dans $\mathbb{C}^n$.*
Alors on a $\widehat{\mathfrak{M}}^{k+1}.J_/(f) = \widehat{\mathfrak{M}}^{k+1}.J(P)$ où $\widehat{\mathfrak{M}}$ désigne l'idéal engendré par $\mathfrak{M}$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}}$.
Si on a de plus $Q \in \mathfrak{M}.J(Q)$, ce qui est vérifié en particulier si Q est quasi homogène, on obtiendra l'inclusion $\mathfrak{M}^k.\frac{\partial f}{\partial t} \subset \mathfrak{M}^{k+1}.J_/(f)$ et la proposition précédente donnera que $\mathcal{M}^k \subset \mathbb{G}$ sur $S = \{x = 0\}$ au voisinage de l'origine.

PREUVE. L'hypothèse permet donc d'écrire chaque $x^\alpha.\frac{\partial Q}{\partial x_j}$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, vérifiant $|\alpha| = k+1$, comme combinaison linéaire à coefficients holomorphes des $x^\beta.\frac{\partial P}{\partial x_i}$. Si γ désigne le vecteur colonne des $x^\alpha.\frac{\partial P}{\partial x_j}$ et δ le vecteur colonne des $x^\alpha.\frac{\partial Q}{\partial x_j}$ on aura donc $\delta = \mathcal{R}.\gamma$ où $\mathcal{R}$ est une matrice à coefficients holomorphes dans $\mathbb{C}^n$.
Comme les $x^\alpha.\big[\frac{\partial P}{\partial x_j} + t.\frac{\partial Q}{\partial x_j}\big]$ forment un système générateur sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}}$ de $\widehat{\mathfrak{M}}^{k+1}.J_/(f)$, on aura une relation matricielle

$$\Gamma = (Id + t.\mathcal{R}).\gamma$$

où Γ désigne le vecteur colonne des $x^\alpha.\big[\frac{\partial P}{\partial x_j} + t.\frac{\partial Q}{\partial x_j}\big]$. Pour $|t| \ll 1$ la matrice $Id + t.\mathcal{R}$ sera inversible et on a ainsi établi l'égalité $\widehat{\mathfrak{M}}^{k+1}.J_/(f) = \widehat{\mathfrak{M}}^{k+1}.J(P)$ au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$. Cette égalité montre que le lieu singulier de f est contenu dans $S = \{x = 0\}$ au voisinage de l'origine, et comme on a $Q(0) = 0$, égalité imposée par l'appartenance de Q à $\mathfrak{M}.J(Q)$, on aura égalité. On conclut immédiatement car $Q \in J_/(f)$ implique $Q \in J(P)$. ■

Illustrons ceci par un exemple simple "explicite".

Exemple 2. Il s'agit de calculer l'exemple suivant dans lequel on a $n = 2$: $P(x, y) = x^4 + y^4, Q(x, y) = x^2.y^2$ et donc $f(x, y, t) = P(x, y) + t.Q(x, y)$ qui est une déformation à $\mu-$constant pour $t \neq \pm 2$, d'hypersurfaces à singularités isolées de $\mathbb{C}^2$ dont le faisceau des modules de Brieskorn n'est pas localement constant. En effet le birapport des quatre droites de $\mathbb{C}^2$ que l'on obtient pour chaque valeur de t et qui vaut[2] $-\frac{t-2}{4}$ est une fonction localement injective, ce qui montrent que ces germes de fonctions holomorphes ne sont jamais localement deux à deux analytiquement équivalentes.
Cependant l'hypothèse $\mathfrak{M}^2.J(Q) \subset \mathfrak{M}^2.J(P)$ du lemme précédent est satisfaite, où ici, on a simplement $\mathfrak{M} := (x, y)$.
On vérifie aussi immédiatement que $Q \notin J(P)$. On aura donc $\mathbb{G} = \mathcal{M}$.

Explicitons le calcul de ∇.
On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 2t.xy^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 2t.x^2y.$$

et donc

$$\begin{aligned} 8.x^3y &= 2y\frac{\partial f}{\partial x} - tx.(\frac{\partial f}{\partial y} - 2t.x^2y) \\ &= 2t^2.x^3y + 2y\frac{\partial f}{\partial x} - tx.\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$2(4 - t^2).x^3y = 2y\frac{\partial f}{\partial x} - tx.\frac{\partial f}{\partial y} \in J_/(f) \quad \text{et} \tag{1}$$
$$2(4 - t^2).xy^3 = 2x\frac{\partial f}{\partial y} - ty.\frac{\partial f}{\partial x} \in J_/(f) \quad \text{par symetrie.} \tag{2}$$

On en déduit que

$$4.x^5 = x^2.\frac{\partial f}{\partial x} - 2t.x^3y^2 \in\in J_/(f) \quad \text{et} \tag{3}$$
$$4.y^5 = y^2.\frac{\partial f}{\partial y} - 2t.x^2y^3 \in J_/(f) \quad \text{par symetrie.} \tag{4}$$

[2]Il s'agit de calculer le birapport des quatre racines de l'équation $z^4 + t.z^2 + 1 = 0$. Ce nombre est défini modulo le groupe du birapport. Par exemple $1 - (-\frac{t-2}{4}) = \frac{t+2}{4}$ représente la même classe de birapport.

Grâce aux relations

$$4.x^4 = -2t.x^2y^2 + x.\frac{\partial f}{\partial x} \tag{5}$$

$$4.y^4 = -2t.x^2y^2 + y.\frac{\partial f}{\partial y} \tag{6}$$

une $\mathcal{O}_D[[b]]-$base de $\mathbb{E}$ est donc donnée par

$$(1, x, y, x^2, y^2, xy, x^2y, xy^2, x^2y^2).dx \wedge dy.$$

Soit $\omega := x.dy - y.dx$. Pour un monôme m homogène de degré $\delta(m)$ on a

$$d_/(m.\omega) = \frac{\delta(m)+2}{4}.\frac{d_/f}{f} \wedge m.\omega \tag{7}$$

ce qui donne

$$a(m) = \frac{\delta(m)+2}{4}.b(m). \tag{8}$$

On a également

$$\nabla(d(m.\omega)) = d_/f \wedge \frac{\partial(m.\omega)}{\partial t} - x^2y^2.d(m.\omega) \tag{9}$$

$$\text{et donc} \quad \nabla(m) = -x^2y^2.m. \tag{10}$$

Comme $x^2y^2.\mathfrak{M} \subset J_/(f)$, on voit que $b^{-1}\nabla$ opère sur $\mathbb{G} = \mathcal{M}$.
Par exemple, comme

$$2(4-t^2).x^3y^2 = 2y^2\frac{\partial f}{\partial x} - txy.\frac{\partial f}{\partial y} \tag{11}$$

$$= d_/f \wedge (2y^2dy + t.xydx) \tag{12}$$

on aura

$$b^{-1}\nabla(x) = \frac{t.x}{2(4-t^2)}.$$

Donc $(4-t^2)^{\frac{1}{4}}.x$ sera (localement) dans $Ker\,\nabla$ pour $|t| < 2$.

Comme $\nabla(1) = -x^2y^2 \notin b.\mathbb{E}$, pour tester directement la $b^{-1}\nabla-$finitude de $\mathbb{E}$, posons $E_1 := \mathbb{E} \oplus \mathcal{O}_D.\varepsilon$, où l'on définit $\varepsilon := b^{-1}(x^2y^2)$.
Alors on obtient, puisque $a(x^2y^2) = \frac{3}{2}b(x^2y^2)$ les relations suivantes :

$$a\varepsilon = \frac{1}{2}.b\varepsilon \quad \text{et} \quad \nabla\varepsilon = b^{-1}\nabla(x^2y^2) = b^{-1}(-x^4y^4).$$

Explicitons $b^{-1}(-x^4y^4)$. On a d'après (1)

$$2(4-t^2).x^4y^4 = d_/f \wedge (2xy^4dy + t.x^2y^3dx) \tag{13}$$

ce qui donne $2(4-t^2).x^4y^4 = b(2y^4 - 3t.x^2y^2)$ et donc d'après (6)

$$2(4-t^2).x^4y^4 = b(-4t.x^2y^2 + d_{/}f \wedge (-\frac{1}{2}y.dx)) = b(-4t.x^2y^2 + \frac{1}{2}.b(1)).$$

On a donc

$$b^{-1}\nabla(\varepsilon) = \frac{2t}{4-t^2}.\varepsilon - \frac{1}{4(4-t^2)}.1.$$

Ceci permet de conclure que E_1 est stable par $b^{-1}\nabla$.
On obtient ainsi directement la $b^{-1}\nabla-$régularité pour $\mathbb{E}$ dans cet exemple.
Le $\mathcal{O}_D[[b]]-$module $\mathcal{O}_D[[b]].1 \oplus \mathcal{O}_D[[b]].\varepsilon$ est stable par a et $b^{-1}\nabla$, via les formules:

$$a.\varepsilon = \frac{1}{2}.b\varepsilon, \quad a.1 = \frac{1}{2}.b.1$$
$$b^{-1}\nabla(1) = -\varepsilon, \quad b^{-1}\nabla(\varepsilon) = \frac{2t}{4-t^2}.\varepsilon - \frac{1}{4(4-t^2)}.1.$$

Exemple 3. Soient p, q, r trois entiers ≥ 3 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ et posons

$$f(x,y,z,t) = x^p + y^q + z^r + txyz.$$

Remarquons que l'on a $f \in \mathfrak{M}^3$ et donc $J_{/}(f) \subset \mathfrak{M}^2$.
Montrons que, sur l'ouvert $S^* := \{t \neq 0\}$ de $\mathbb{C}$, les hypothèses de la proposition 4.2.1 sont vérifiées avec $k = 1$. D'abord on a

$$J_{/}(f) = (p.x^{p-1} + t.yz, q.y^{q-1} + t.xz, r.z^{r-1} + t.xy).$$

Les relations

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p.x^{p-1} + t.yz \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q.y^{q-1} + t.xz \quad \frac{\partial f}{\partial z} = r.z^{r-1} + t.xy$$

donnent

$$pq.x^{p-1}.y^{q-1} = t^2.xyz^2 + \mathfrak{M}^2.J_{/}(f) \quad \text{ainsi que}$$
$$t.x^{p-1}.y^{q-1} = -r.z^{r-1}.x^{p-2}y^{q-2} + \mathfrak{M}^2.J_{/}(f)$$

puisque $x^{p-2}y^{q-2} \in \mathfrak{M}^2$. On a donc

$$t^3.xyz^2 + pqr.z^{r-1}.x^{p-2}y^{q-2} + \mathfrak{M}^2.J_{/}(f)$$

ou encore, puisque $p, q, r,$ sont au moins égaux à 3 et $t \neq 0$,

$$t^3.xyz^2(1 + \frac{pqr}{t^3}.z^{r-3}x^{p-3}y^{q-3}) \in \mathfrak{M}^2.J_{/}(f). \tag{@}$$

On aura aussi

$$\begin{aligned} t.x^py &= -r.x^{p-1}z^{r-1} + x^{p-1}.\frac{\partial f}{\partial z} \\ t^2.x^py &= -r.t.x^{p-1}z^{r-1} + \mathfrak{M}^2.J_{/}(f) = rq.y^{q-1}.x^{p-2}.z^{r-2} + \mathfrak{M}^2.J_{/}(f) \\ &= rq.y^2.x.z.(y^{q-3}.x^{p-3}.z^{r-3}) + \mathfrak{M}^2.J_{/}(f) \in \mathfrak{M}^2.J_{/}(f) \end{aligned}$$

d'après (*). On a donc, en utilisant encore le fait que x, y, z jouent le même rôle, que

$$\mathfrak{M}.\frac{\partial f}{\partial t} \subset \mathfrak{M}^2.J_/(f) \quad \text{ainsi que} \quad \mathfrak{M}.f \subset \mathfrak{M}^2.J_/(f).$$

Il nous reste seulement à voir que $\frac{\partial f}{\partial t}.h \in J_/(f)$ implique $h \in \mathfrak{M}$; ceci résulte du fait que $\frac{\partial f}{\partial t} \notin J_/(f)$.

Lemme 4.3.2 *Notons par* $G := \mathfrak{M}.\Omega^n_/\big/d_/f \wedge d_/\Omega^{n-2}_/$.
Comme le fibré vectoriel sur S^* *défini par* $\mathbb{E}\big/b.\mathbb{E}$ *est trivial, on constate facilement que le* $\mathcal{O}_S[[b]]-$*module*

$$\Gamma := G + \mathcal{O}_S[[b]].b^{-1}\alpha$$

de $\mathbb{E}[b^{-1}]$ *où* $\alpha := xyz$, *est stable par* $a, b, b^{-1}\nabla$ *et* $b^{-1}a$ *sur* S^*.

Preuve. Comme on a

$$p.x^p = q.y^q = r.z^r = -t.\alpha \quad modulo \quad \mathfrak{M}.J_/(f),$$

on aura

$$f - (1-\rho).t\alpha \in \mathfrak{M}.J_/(f) \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}. \tag{14}$$

On en déduit en particulier que $a.\alpha \in \mathfrak{M}^2.J_/(f)$ et donc que $ab^{-1}\alpha$ est bien dans Γ. La stabilité par $b^{-1}a$ en découle alors puisque la relation $\mathfrak{M}.f \subset \mathfrak{M}^2.J_/(f)$ donne

$$a.G \subset \mathfrak{M}^2.J_/(f) \subset b.G.$$

Remarques.

1. Le cas $p = q = r = 3$ relève du premier exemple traité plus haut.
2. Les cas $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ résulte de l'étude de [B.II] puisque l'on a

   $$W := \frac{1}{p}.x.\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{q}.y.\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{r}.z.\frac{\partial}{\partial z} + (1-\rho).t.\frac{\partial}{\partial t}$$

   qui vérifie $W.f = f$ et ne s'annule pas sur $\{t \neq 0\}$.
3. La relation $\mathfrak{M}.f \subset \mathfrak{M}^2.J_/(f)$ implique que le plus grand sous-(a,b)-module à pôle simple de f_t pour chaque $t \neq 0$ est la fibre en t de $\mathcal{M}$.
   On a donc $\mathbb{G} = \mathcal{M} = \mathfrak{M}.\mathbb{E}$ dans ce cas. Donc $\mathcal{M}_{t=1}$ est le plus grand sous-(a,b)-module à pole simple de $\mathbb{E}_{t=1}$, d'après la description de $\mathcal{H}^n$ dans le cas où il existe un champ de vecteur holomorphe ne s'annulant pas et vérifiant $W.f = f$ près des points de S^* (voir [B.II] théorème 4.3.1.)

5 Références.

1. [B.84] Barlet, D. *Contribution effective de la monodromie aux développements asymptotiques,* Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 17 (1984), p.293-315.

2. [B.86] Barlet, D. *Monodromie et pôles de* $\int_X |f|^{2\lambda}\square$. Bull. Soc. Math. France, t.114 (1986), p. 247-269.

3. [B.95] Barlet, Daniel *Theorie des (a,b)-modules II. Extensions* in Complex Analysis and Geometry, Pitman Research Notes in Mathematics Series 366 Longman (1997), p. 19-59.

4. [B.05] Barlet, D. *Modules de Brieskorn et formes hermitiennes pour une singularité isolée d'hypersurface,* Revue de l'Institut E. Cartan (Nancy) vol.18 (2005), p.19-46.

5. [B.II)] Barlet, D. *Sur certaines singularités non isolées d'hypersurfaces II*, à paraître au Journal of Algebraic Geometry.

6. [M.74] B.Malgrange : *Intégrale asymptotique et monodromie.* Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. , t.7 (1974), p.405-430

7. [S.70] M. Sébastiani : *Preuve d'une conjecture de Brieskorn.* Manuscripta Math. 2 (1970), p.301-308.

Barlet Daniel, Institut Elie Cartan UMR 7502
Nancy-Université, CNRS, INRIA et Institut Universitaire de France,
BP 239 - F - 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex.France.
e-mail : barlet@iecn.u-nancy.fr.